CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 30 :

1. $F_0=0$; $F_1=1$; $F_2=F_1+F_0=1$; $F_3=F_2+F_1=2$; $F_4=3$; $F_5=5$
   $F_6=8$; $F_7=13$; $F_8=21$; $F_9=34$; $F_{10}=55$

2. (Par recurrence)
   *Pour n=1: $(-1)^n=(-1)^1=-1$ et $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=F_2F_0-F_1^2=-1$
   Donc la proprieté est vrai à l'ordre initial.
   *Soit $n\in IN^*$ supposons que $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$
   et montrons que $F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$

$$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=(F_{n+1}+F_n).F_n-F_{n+1}^2=F_n^2+F_{n+1}F_n-F_{n+1}^2$$
$$=F_n^2-F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)$$
$$=F_n^2-F_{n+1}(F_n+F_{n-1}-F_n)$$
$$=F_n^2-F_{n+1}.F_{n-1}=-(F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2)=-(-1)^n$$
$$=(-1)^{n+1}$$

   Cl : pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$

3. pour tout entier non nul n on a : $F_{n+1}F_{n-1}-F_nF_n=(-1)^n$
   et comme pour tout entier non nul n F_n est un entier ; alors d'après th de bézout $F_n\wedge F_{n+1}=1$

4. (Par recurrence sur m)
   *Pour m=0 $F_{n+m}=F_n$ et $F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n=F_0F_{n-1}+F_1F_n=F_n$
   Donc la proprieté est vrai à l'ordre initial
   *Soi $m\in IN$ Supposons que $F_{n+m}=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n$
   Et montrons que $F_{n+m+1}=F_{m+1}F_{n-1}+F_{m+2}F_n$

$$F_{n+m+1}=F_{n+m}+F_{n+m-1}=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n+F_{m-1}F_{n-1}+F_mF_n$$
$$=(F_m+F_{m-1})F_{n-1}+(F_{m+1}+f_m)F_n$$
$$=F_{m+1}F_{n-1}+F_{m+2}F_n$$

   Cl : pour tout entier non nul n et pour tout entier m on a $F_{n+m}=F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n$

5. $F_m\wedge F_{m+n}=F_m\wedge(F_mF_{n-1}+F_{m+1}F_n)=F_m\wedge(F_{m+1}F_n)=F_m\wedge F_n$ car $F_m\wedge F_{m+1}=1$

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn